

第 35 讲 傅里叶级数和傅里叶变换

见上一讲义

第 36 讲 透镜

光是粒子还是波在历史上有过长期的争论。直到量子力学建立之后才解决了这一疑问---光是一种物质波，在不同环境下表现出其粒子性和波动性。干涉、衍射等性质体现了光的波动性质。光在均匀介质中沿直线传播的特性一般被视为光的粒子性的表现。

费马原理

对于光在不同介质中传播的特性，人们很早就开始了定量的研究，在公元 984 年巴格达的 Ibn Sahl 就已经得到了折射定律，尽管这个定律最后用荷兰天文学家 Willebrord Snellius (1580–1626) 的名字命名为 Snell 定律。在 17 世纪中期，费马建立了费马原理，并用此解释了折射、反射定律以及其他很多光学现象，这一原理被认为是几何光学的基本原理，并由此出发引申出了物理学中更基本的原理—最小作用量原理。

费马原理又称为最短时间原理，最初的描述是光从一点传播到另一点所走的路径是所有可能路径中历时最短的那一条。费马认为光是以有限速度在介质中传播的，在不同的介质中有不同的光速。若在真空中的光速为 c ，在某介质中的光速为 v ，则比例

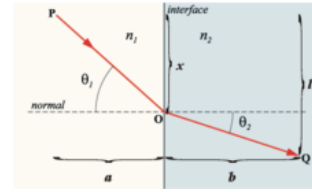
$$n = \frac{c}{v}$$

被称为该介质的**折射率**。光 t_0 时刻从 A 点出发在 t_1 时刻达到 B 点，所经历的时间为

$$T = \int_{t_0}^{t_1} dt = \frac{1}{c} \int_{t_0}^{t_1} \frac{c}{v} \frac{ds}{dt} dt = \frac{1}{c} \int_A^B n ds$$

积分 $\int_A^B n ds$ 称为从 A 点到 B 点的**光程**，这个积分不仅与积分的初始点和终了点有关，而且与中间所走的路径有关，称为**路径积分**。其意义是将光在介质中走的路程长度折算成光花相同时间在真空中走的路程长度。因此从 A 点到 B 点花费的时间最少等价于从 A 点到 B 点走的光程最短。在同一均匀介质中，光往不同方向传播的速度是相同的，因此根据费马原理光从一点到另一点就应该走直线，因为这样光在这两点间光程最短。

当光从一个均匀介质中的一点运动到另一个均匀介质中的一点时，为了减少所花费的时间在介质界面处光线就可能发生偏折，这称为光的**折射**现象。如右图所示，若光从 P 点出发要达到 Q 点。P 点所在介质的光速为 v_1 ，折射率为 $n_1 = c/v_1$ ，Q 点所在介质的光速为 v_2 ，折射率为 $n_2 = c/v_2$ 假设光从 P 点出发在 O 点发生折射后到达 Q 点。 θ_1 为入射光线 PO 与界面法向间的夹角，称为入射角， θ_2 为折射光线 OQ 与界面法向的夹角，称为折射角。则从 P 经过 O 再到 Q 光所花费的时间为



$$T = \frac{PO}{v_1} + \frac{OQ}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}}{v_2}$$

为了确定满足费马原理的 O 点坐标，令 $\frac{dT}{dx} = 0$ ，则

$$\frac{dT}{dx} = \frac{x}{v_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{l-x}{v_2 \sqrt{b^2 + (l-x)^2}} = 0$$

由于

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin \theta_1, \quad \frac{l-x}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} = \sin \theta_2$$

则前式可变为

$$\frac{c \sin \theta_1}{v_1} = \frac{c \sin \theta_2}{v_2}$$

即

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad \text{or} \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}$$

这就是 **Snell 折射定律**。

但是之前表述的费马原理并不具有一般性。比如在光线反射的过程中，光线并没有走最短光程的路径。因为是在同一介质中，出发点与抵达点间最短光程的路线是这两点间的直线，而不是先到达镜面再反射回来。因此费马原理的现代表述为：光在两点间传播时所走的路径为经历所有可能路径所花费时间的变分为零的路径。也就是说光在传播时如果在真实路径基础上稍微有些偏离，其所花费的时间与真实过程所花费时间在一级无穷小的级别上没有差别，其差别至少为二级无穷小。这类似于函数一次导数为零的情况。

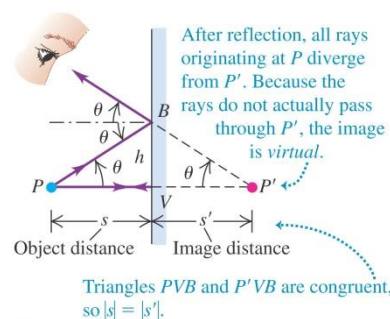
最小作用量原理是在现代物理学中广泛应用的基本原理。在历史演化过程中，它与费马原理有很紧密的关系。在量子力学中，一种量子化方案是由狄拉克最早提出，后由费曼完成的路径积分量子化方案。这一方案与费马原理有更紧密的关系。

费马原理与惠更斯原理

费马原理是可以由惠更斯原理推导出来的。换句话说光的粒子性其实也是其波动性的一种体现。这里仅定性分析如何从惠更斯原理得到费马原理。由于光是波，从一点出发时，它的次波应该是球面波，而这些次波又可以作为新的光源发出新的次波。因此光可以从 A 点出发经历所有可能路径到达 B 点，在 B 点感受到光强是来自所有路径光波的叠加。对于来自不满足费马原理的那些光波，它们相互间的光程差很大，涨落也很大，因此叠加的结果应该是相互抵消，也就是相消干涉。（想象有相位为 θ 的路径，也会有相位为 $-\theta$ 的路径，它们相互抵消）。但来自符合费马原理的光波和来自与这条路径有微小涨落路径的光波，它们的光程差是二阶小量，因此它们叠加的结果是相长干涉。因此观测到的光的路线就是这样的路线。在费曼的路径积分量子化方案中发生的事情和这很相似。

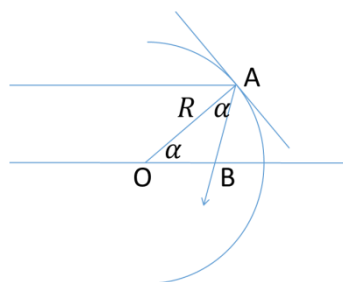
平面镜成像

容易从费曼原理得到光线从平面镜反射时所满足的定律。将反射光线与镜面法线间的夹角称为反射角。反射定律为入射角等于反射角。由 P 点发出的不同方向的光线在镜面上反射后会反射到不同的方向上去，而这些反射光如果反方向画延长线的话会汇聚到 P 点相对于镜面对称的 P' 点处。当向着镜子看过去时会认为光线是从 P' 点发出的。我们成 P' 点为 P 点由镜面形成的一个虚像。虚的意思是光线并不是真的由 P' 点发出的。



球面镜成像

当镜面不是平面而是球面时，称为球面镜。内部反射光线的球面镜称凹面镜，外部反射光线的球面镜称凸面镜。球面镜的对称轴称为光轴。当一束平行于光轴的光线照在凹面镜上时，在镜面的不同点光线会反射到不同方向去，反射的方式依然是入射角等于反射角。由右图容易得到关系



$$OB \cos \alpha = \frac{R}{2}$$

即

$$OB = \frac{R}{2 \cos \alpha}$$

当球面镜对应的弧角比较小时，称为薄镜。对于一个薄的凹面镜入射角或反射角 α 很小，因此上式可以近似为

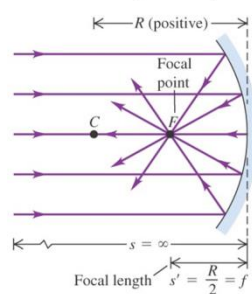
$$OB = \frac{R}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right)$$

则

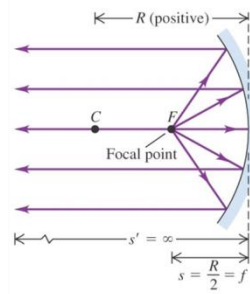
$$OB \approx \frac{R}{2}$$

基本是一个常数。也就是说这束平行光的反射光会汇聚到同一点 B 上去。B 点称为该镜的焦点，B 点沿光轴方向到镜面的距离称为焦距 $f = \frac{R}{2}$ 。反过来，如果将一个点光源放在焦点处，其发出的光的反射光将为平行与光轴的平行线。当然，当这个镜子不“薄”的时候，入射的平行光不会汇聚到一点上，这种情况称为散焦。

(a) All parallel rays incident on a spherical mirror reflect through the focal point.

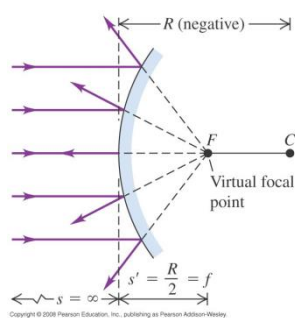


(b) Rays diverging from the focal point reflect to form parallel outgoing rays.

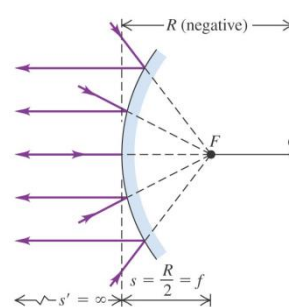


类似的，对于薄的凸面镜，可以发现也有焦点，但不同于凹面镜，它的焦点是入射平行光的反射光的反向延长线形成的。也就是说凸面镜的作用不是聚集光线，而是发散光线。

(a) Paraxial rays incident on a convex spherical mirror diverge from a virtual focal point.

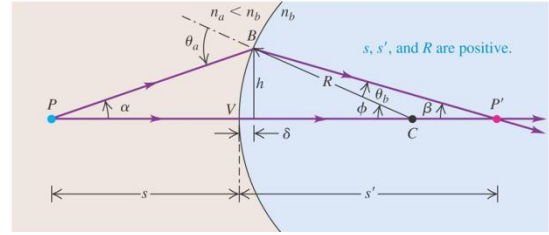


(b) Rays aimed at the virtual focal point are parallel to the axis after reflection.



界面为球面的折射

当两种折射率不同的介质以球面为界面时，从一方光轴上 P 点发出的两条光线的折射情况如图。沿光轴的光线入射角为零，折射角也为零，不发生偏转。



与光轴成 α 角入射的光线 PB 发生折射，

折射光与光轴交与 P' 点。若 B 点距离光轴不远 $h \ll s'$ and s ，由折射定律知

$$n_a \sin \theta_a = n_b \sin \theta_b$$

由于 θ_a 和 θ_b 都很小，则上式近似为

$$n_a \theta_a \approx n_b \theta_b$$

存在几何关系

$$\theta_a = \alpha + \phi \quad \text{and} \quad \phi = \beta + \theta_b$$

因此可得

$$n_a \alpha + n_b \beta = (n_b - n_a) \phi$$

由于

$$\alpha \approx \frac{h}{s}; \quad \beta \approx \frac{h}{s'}; \quad \phi \approx \frac{h}{R}$$

最后可以得到关系

$$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{n_b - n_a}{R}$$

当 $s \rightarrow \infty$ 时，也就是说入射光为平行光时，折射光汇聚于 P' 点， s' 为焦距

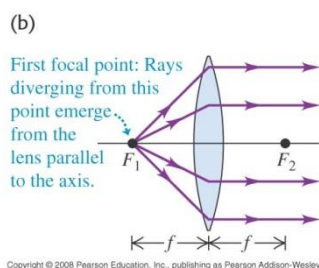
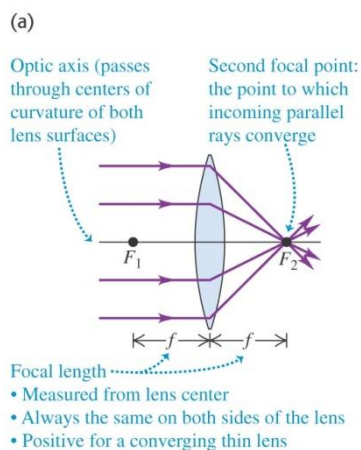
$$f' = R \frac{n_b}{n_b - n_a}$$

当 $s' \rightarrow \infty$ 时，则由 P 点发出的光折射成平行光， s 为另一个焦距

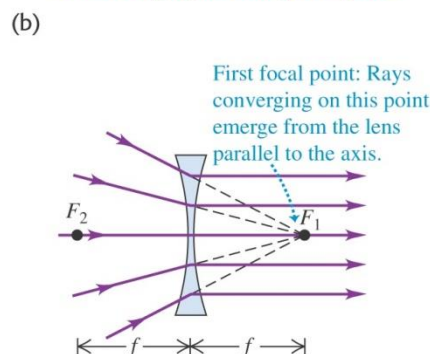
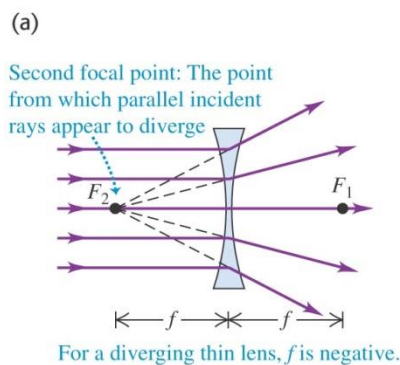
$$f = R \frac{n_a}{n_b - n_a}$$

透镜

利用上述的原理可以制作凸透镜或凹透镜。对于透镜折射率大于外部介质的情况，凸透镜类似于凹面镜，具有汇聚光线的作用，但不同的是凸透镜是将平行光线汇聚到透镜的另外一边，而不是像凹面镜那样将平行光汇聚到同一侧。而凹透镜起到的作用类似于凸面镜，为发散光线。另外透镜不同于反射镜的地方是透镜具有两个焦点，而反射镜仅有一个焦点。



Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.



透镜成像

在凸透镜的一侧 P 点放置一高为 y 的物体，其顶端 Q 点发出的光线汇聚于另一侧的 Q' 点，如图所示。由三角形的相似性容易得到关系

$$\frac{y}{y'} = \frac{s}{s'} = \frac{f}{s' - f}$$

因此可以得到透镜成像公式

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

其中 s 称为像距， s' 称为物距。类似可以凹面镜的成像公式。只是需要注意的是当像或所使用的焦点与物在同一侧时应取负值。 $M = y'/y = s'/s$ 称为放大率。

放大镜的放大率

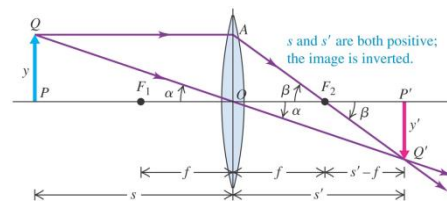
对于凸透镜，当 $s < f$ 时， $s' = \frac{f}{s-f} s$ ，放大率

$$M = \left| \frac{s'}{s} \right| = \frac{f}{f-s} > 1$$

因此此时凸透镜起到的放大物体的作用，其像为虚像。同时放大率又可以写成

$$M = \frac{|s'| - f}{f}$$

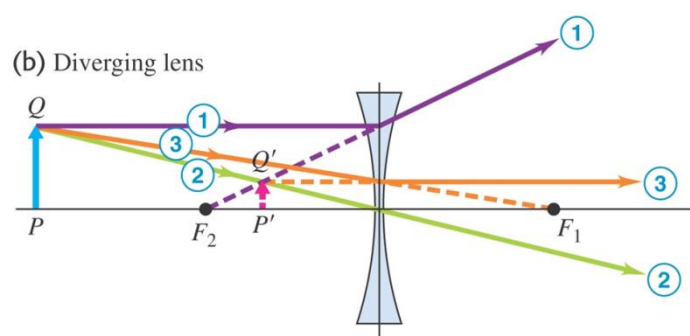
从这两个式子看，当物距接近焦距的时候，放大率会变的非常大，甚至于趋向无穷大。但是当放大率变大的时候，像距也快速变大，从视觉效果来说，并没有实



际用处。一般情况下，我们定义一个放大镜的放大倍数时是计算当像距离眼睛为 25 厘米时的放大率，因为此时人眼看物体的感觉最为舒适。通常简单定义放大镜的放大倍数为

$$M = \frac{25\text{cm}}{f}$$

对于凸透镜，当把物体放在不同位置时，会有不同像产生，如当 $s < f$ 时，像为放大正立的虚像。当 $f < s < 2f$ ，像为放大的倒立实像，当 $s > 2f$ 时，像为倒立缩小的实像。但对于凹透镜来说，无论物体放在什么位置，形成的都是正立缩小的虚像。如图所示。



- ① Parallel incident ray appears after refraction to have come from the second focal point F_2 .
- ② Ray through center of lens does not deviate appreciably.
- ③ Ray aimed at the first focal point F_1 emerges parallel to the axis.

Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley